

Muhammadov Shahzod Aktam o'g'li, magistr.

Raximov Xolmurot Abdullayevich, pedagogika fanlari bo'yicha falsafa doktori,  
dotsent. [ORCID](https://orcid.org/0009-0005-5889-1373)- 0009-0005-5889-1373 email: raximov.xolmurod21@gmail.com



## ELLIPTIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN NOLOKAL CHEGARAVIY MASALALARNI INTEGRAL TENGLAMALAR USULI BILAN TADQIQ ETISH

<https://zenodo.org/records/19907105>

**Annotatsiya:** Mazkur maqolada elliptik tipdagi differensial tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalar integral tenglamalar usuli asosida chuqur tahlil qilinadi. Masala Fredgolm tipidagi integral tenglamaga keltiriladi va funksional analiz usullari yordamida yechimning mavjudligi, yagonaligi hamda barqarorligi isbotlanadi. Olingan natijalar klassik chegaraviy masalalarni umumlashtiradi va nolokal shartli modellarni tadqiq etishda samarali usul taklif etadi.

**Kalit so'zlar:** elliptik tenglama, nolokal masala, integral tenglama, Fredgolm alternativasi, Green funksiyasi, kompakt operator.

## STUDY OF NONLOCAL BOUNDARY-TERM PROBLEMS FOR ELLIPTIC- TYPE EQUATIONS USING THE METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS

**Abstract:** In this article, nonlocal boundary value problems for elliptic differential equations are analyzed in depth based on the method of integral equations. The problem is reduced to an integral equation of the Fredholm type and the existence, uniqueness, and stability of the solution are proven using functional analysis methods. The results obtained generalize classical boundary value problems and offer an effective method for studying nonlocal conditional models.

**Keywords:** elliptic equation, nonlocal problem, integral equation, Fredholm alternative, Green's function, compact operator

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

**Аннотация:** В данной статье на основе метода интегральных уравнений подробно анализируются нелокальные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений. Задача сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма, а существование, единственность и устойчивость решения доказываются с помощью методов функционального анализа. Полученные результаты обобщают классические краевые задачи и предлагают эффективный метод изучения нелокальных условных моделей.

**Ключевые слова:** эллиптическое уравнение, нелокальная задача, интегральное уравнение, альтернатива Фредгольма, функция Грина, компактный оператор.

**Kirish.** Elliptik tipdagi differensial tenglamalar matematik fizika, amaliy matematika hamda muhandislik fanlarining muhim nazariy asosini tashkil etadi. Ushbu tenglamalar asosan stasionar (vaqtga bog‘liq bo‘lmagan) jarayonlarni tavsiflashda qo‘llanilib, issiqlik o‘tkazuvchanligi, elektrostatik maydonlar, elastiklik nazariyasi, suyuqliklar muvozanati kabi ko‘plab fizik hodisalarni modellashtirishda keng foydalaniladi. Shu sababli elliptik tenglamalar nazariyasi differensial tenglamalar va matematik analizning eng rivojlangan va chuqur o‘rganilgan bo‘limlaridan biri hisoblanadi.

Klassik chegaraviy masalalarda odatda yechimga nisbatan lokal xarakterga ega bo‘lgan shartlar qo‘yiladi. Jumladan, Dirixle tipidagi shartlarda yechimning chegaradagi qiymati beriladi, Neyman tipidagi shartlarda esa uning normal hosilasi orqali chegaradagi xatti-harakati aniqlanadi. Bunday masalalar yaxshi o‘rganilgan bo‘lib, ular uchun mavjudlik, yagonalik va barqarorlik teoremlari keng tadqiq etilgan.

Biroq zamonaviy ilmiy tadqiqotlar va amaliy modellashtirish jarayonlarida ko‘plab tizimlar global xarakterga ega bo‘lib, ularni tavsiflashda lokal chegaraviy shartlar yetarli bo‘lmaydi. Ayniqsa, biologik tizimlar, ekologik modellar, boshqaruv nazariyasi va issiqlik almashinuvi jarayonlarida yechimning butun soha bo‘yicha integrallangan xossalari muhim rol o‘ynaydi. Shu sababli bunday jarayonlarni ifodalashda **nolokal chegaraviy shartlardan** foydalanish zarur bo‘ladi.

Nolokal chegaraviy shartlarda yechim faqat chegaraning alohida nuqtalarida emas, balki butun soha yoki uning ma’lum qismi bo‘yicha integral munosabatlar orqali aniqlanadi. Masalan, quyidagi tipdagi shartlar keng uchraydi:

$$\int_{\Omega} u(x) dx = C$$

Bunday yondashuv klassik chegaraviy masalalarni sezilarli darajada umumlashtiradi va yangi turdagi matematik muammolarni yuzaga keltiradi.

Nolokal masalalarning asosiy xususiyatlari quyidagilardan iborat:

ular klassik lokal chegaraviy masalalarga nisbatan umumiyroq va murakkabroq bo‘ladi;

yechim global xarakterga ega bo‘lib, butun soha bilan bog‘lanadi;

masalani tadqiq etishda differensial tenglamalar nazariyasi bilan bir qatorda funksional analiz, operatorlar nazariyasi va integral tenglamalar usullaridan foydalanish talab etiladi;

yechimning mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchun Fredgolm tipidagi operator tenglamalar muhim ahamiyat kasb etadi.

Mazkur ishning asosiy maqsadi elliptik tipdagi differensial tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalarni chuqur o‘rganishdan iborat bo‘lib, quyidagi vazifalarni hal qilish ko‘zda tutiladi:

elliptik tenglama uchun nolokal chegaraviy masalani matematik jihatdan to'g'ri qo'yish;

berilgan masalani Green funksiyasi yoki boshqa usullar yordamida integral tenglama ko'rinishiga keltirish;

hosil bo'lgan integral tenglamani Fredholm tipidagi operator tenglama sifatida tadqiq etish;

funksional analiz usullari yordamida yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligini asoslash;

nolokal shartlarning yechim xossalriga ta'sirini tahlil qilish.

Shunday qilib, elliptik tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalarni o'rganish nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki amaliy masalalarni modellashtirishda ham katta ahamiyatga ega bo'lib, ushbu yo'nalish zamonaviy matematik tadqiqotlarning dolzarb yo'nalishlaridan biri hisoblanadi.

**Adabiotlar tahlili.** Elliptik tipdagi differensial tenglamalar va ular uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar matematik fizika hamda amaliy matematikaning asosiy yo'nalishlaridan biri sifatida keng o'rganilgan. Klassik yondashuvlarda, asosan, Dirixle va Neyman tipidagi lokal chegaraviy shartlar asosida masalalar qo'yilib, ularning yechiluvchanligi, yagonaligi va silliqlik xossalari chuqur tadqiq etilgan. Ushbu yo'nalishning nazariy asoslari Lars Hörmander, David Gilbarg va Neil Trudinger kabi olimlarning fundamental ishlari bilan bog'liq bo'lib, ular tomonidan elliptik tenglamalar nazariyasining asosiy tamoyillari ishlab chiqilgan.

Biroq real jarayonlarni modellashtirishda ko'pincha lokal chegaraviy shartlar yetarli bo'lmaydi. Shu sababli ilmiy tadqiqotlarda nolokal chegaraviy shartlarga asoslangan masalalarga qiziqish ortib bormoqda. Nolokal shartlar yechimni butun soha yoki chegara bo'yicha integral munosabatlar orqali bog'lab, tizimning global xususiyatlarini hisobga olish imkonini beradi. Bu yo'nalishda A.V. Bitsadze va A.A. Samarskii tomonidan olib borilgan tadqiqotlar nolokal masalalarning matematik qo'yilishi va amaliy qo'llanishini shakllantirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Elliptik tenglamalar uchun nolokal masalalarni tadqiq etishda muhim yondashuvlardan biri — integral tenglamalar usulidir. Ushbu usul differensial tenglamani Green funksiyasi yordamida integral tenglamaga keltirishga asoslanadi. Integral tenglamalar nazariyasi esa Erik Ivar Fredholm tomonidan asoslangan Fredholm nazariyasiga tayangan holda rivojlangan bo'lib, keyinchalik David Hilbert tomonidan funksional analiz doirasida kengaytirilgan. Mazkur yondashuv kompakt operatorlar va ularning spektral xossalari qo'llash orqali masalaning yechiluvchanligini aniqlash imkonini beradi.

Zamonaviy tadqiqotlarda nolokal masalalar operator tenglamalar shaklida qaralib, ularni o'rganishda funksional analiz va spektral nazariya usullaridan keng foydalanilmoqda. Bu borada Eberhard Zeidler ning ilmiy ishlari muhim nazariy asos bo'lib xizmat qiladi. Shu bilan birga, nolokal masalalarni sonli usullar asosida yechish, integral operatorlarni approksimatsiya qilish va samarali algoritmlar ishlab chiqish yo'nalishlari ham faol rivojlanmoqda.

O'zbek matematiklari tomonidan ham differensial tenglamalar, matematik fizika tenglamalari va chegaraviy masalalar nazariyasiga oid qator ilmiy va o'quv-uslubiy ishlar amalga oshirilgan. Xususan, respublikamizda chop etilgan "Matematik fizika tenglamalari", "Differensial tenglamalar" hamda "Chegaraviy masalalar nazariyasi"ga oid darslik va qo'llanmalarda elliptik tenglamalar, Dirixle va Neyman masalalari, Green funksiyasi hamda integral tenglamalar usullari yoritilgan. Ushbu manbalar nolokal masalalarni o'rganish uchun muhim nazariy asos bo'lib xizmat qiladi hamda zamonaviy ilmiy yo'nalishlar bilan uzviy bog'liq holda rivojlantirilmoqda.

Shunday qilib, mavjud adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, elliptik tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalar nazariyasi hozirgi kunda faol rivojlanayotgan ilmiy yo'nalishlardan biri hisoblanadi. Integral tenglamalar usuli va Fredgolm nazariyasi ushbu masalalarni tadqiq etishda asosiy metodologik vosita sifatida xizmat qilmoqda. Mazkur ish aynan shu ilmiy yo'nalishni davom ettirib, nolokal masalalarni integral tenglamalar orqali tahlil qilish va ularning yechiluvchanlik xossalari o'rganishga qaratilgan.

### Tadqiqot metodlari

#### 1. Masalaning qo'yilishi

Quyidagi elliptik tenglama qaraladi:

$$-\nabla \cdot (p(x)\nabla u(x)) + q(x)u(x) = f(x), x \in \Omega$$

bu yerda:

$\Omega \subset R_n$  — chegaralangan soha

$$p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \geq 0$$

Nolokal shart:

$$\int_{\Omega} u(x) dx = C$$

#### 2 Integral tenglamaga keltirish

Green funksiyasi yordamida yechim:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y)f(y) dy + \lambda\phi(x)$$

Bu yerda  $\phi(x)$  — bir jinsli tenglama yechimi.

Nolokal shartga qo'yib:

$$\lambda \int_{\Omega} \phi(x) dx = C - \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, y)f(y) dy dx$$

#### 3. Operator ko'rinish

Operator aniqlaymiz:

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y) dy$$

Shunda tenglama:

$$(I - K)u = F$$

#### Natijalar

**Lemma 1.**

Agar  $K(x, y)$  uzluksiz bo'lsa, u holda  $K$  operator  $L^2(\Omega)$  da kompakt.

**Isbot:**

Arzela–Ascoli teoremasiga ko'ra, integral operatorlar kompakt bo'ladi. Kernel uzluksizligi operatorni Hilbert–Shmidt tipiga olib keladi.

**Teorema 1 (Mavjudlik).**

Agar  $K$  kompakt operator bo'lsa, u holda nolokal masala kamida bitta yechimga ega.

**Isbot:**

Fredgolm alternativasi ko'ra:

$$(I - K)u = F$$

tenglama yechimga ega bo'ladi, agar  $F$  operatorning tasvirida yotsa. Kompakt operatorlar uchun bu shart bajariladi.

**Teorema 2 (Yagonalik).**

Agar quyidagi bir jinsli masala:

$$(I - K)u = 0$$

faqat trivial yechimga ega bo'lsa, u holda nolokal masala yagona yechimga ega.

**Isbot:**

Faraz qilaylik, ikkita yechim mavjud:  $u_1, u_2$ .

U holda:

$$u_1 - u_2 = K(u_1 - u_2)$$

ya'ni:

$$(I - K)(u_1 - u_2) = 0$$

Demak,

$$u_1 = u_2.$$

**Teorema 3.**

Yechim quyidagi bahoni qanoatlantiradi:

$$\|u\| \leq C \|f\|$$

**Isbot:**

Operator normasi uchun:

$$\|Ku\| \leq \|K\| \|u\|$$

Shuning uchun:

$\|u\| \leq \|(I - K)^{-1}\| \|F\|$  bu esa uzluksizlikni isbotlaydi.

**Teorema 4. (Fredgolm alternativasi).**

*Agar bir jinsli integral tenglama*

$$\begin{cases} \bar{u}_{\text{shym}}(M) = \pi f(M) + \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{u})}{\rho_{MP}} dl_P, & M \in L; \\ \bar{u}_{\text{shym}}(M) = \mu(M), & M \in L \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi f(M) + \int_L f(P) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{u})}{\rho_{MP}} dl_P = \mu(M), \quad M \in L$$

(ya'ni  $(\mu(M) \equiv 0)$ ) faqat 0 li yechimga ega bo'lsa, shunda va faqatgina shu holda Fredgolmning ikkinchi turdagi integral tenglamasi yagona uzluksiz yechim  $\forall \mu(M) \in C(L)$  ga ega bo'ladi.

**Ta'rif.** Biz  $L$  konturda har qanday ikkita nuqtani olganda shu nuqtalarni birlashtiruvchi kesma butunligicha kontur ichida yotsa, bu kontur qa'tiy qavariq deb ataladi.

Agar:

$$\lambda \neq \lambda_k \text{ (spektrdan tashqarida)}$$

bo'lsa:

yechim mavjud va yagona bo'ladi,

Aks holda: qo'shimcha ortogonallik sharti talab qilinadi.

### Maxsus hol

$$-\Delta u = f(x) \int_{\Omega} u(x) dx = 0$$

Bu holda:

- yechim mavjud bo'lishi uchun:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0$$

### Muhokama.

Olingan natijalar elliptik tipdagi differensial tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalarni integral tenglamalar usuli asosida tadqiq etishning samaradorligini tasdiqlaydi. Tadqiqot jarayonida aniqlanishicha, mazkur yondashuv klassik chegaraviy masalalarga nisbatan bir qator nazariy va amaliy afzalliklarga ega bo'lib, shu bilan birga ayrim murakkabliklarni ham yuzaga keltiradi.

Birinchidan, nolokal chegaraviy shartlarni qo'llash orqali masala tabiiy ravishda umumlashtiriladi va real fizik jarayonlarni yanada to'liqroq aks ettirish imkoniyati yuzaga keladi. Ayniqsa, global xarakterga ega bo'lgan tizimlarda yechimning butun soha bo'yicha o'zaro bog'liqligini ifodalashda nolokal shartlar muhim ahamiyat kasb etadi. Bu esa klassik Dirixle yoki Neyman tipidagi lokal shartlarga nisbatan ancha keng imkoniyatlar yaratadi.

Ikkinchidan, differensial tenglamani integral tenglamaga keltirish jarayoni masalani yangi nuqtai nazardan tahlil qilish imkonini beradi. Xususan, Green funksiyasi yordamida elliptik tenglama Fredgolm tipidagi integral tenglamaga aylantiriladi. Bu esa masalani funksional analiz doirasida, xususan, kompakt operatorlar nazariyasi asosida o'rganishga imkon beradi. Natijada yechimning mavjudligi va yagonaligini aniqlashda Fredgolm alternativasi muhim vosita sifatida namoyon bo'ladi.

Uchinchidan, integral tenglamalar usuli operator tenglamalar shakliga o'tish orqali matematik apparatni soddalashtiradi va nazariy jihatdan asosli yechimlarni olish imkonini beradi. Kompakt operatorlarning spektral xossalari yordamida masalaning yechilish shartlarini aniqlash mumkin bo'ladi, bu esa tadqiqotning ilmiy qiymatini oshiradi.

Shu bilan birga, mazkur yondashuv ayrim murakkabliklarga ham ega. Jumladan, Green funksiyasini aniqlash ko'p hollarda murakkab analitik hisoblashlarni talab etadi va faqat maxsus geometrik sohalar uchun aniq ko'rinishda topilishi mumkin. Umumiy hollarda esa Green funksiyani qurish alohida ilmiy muammo sifatida qaraladi.

Bundan tashqari, nolokal masalalarni sonli usullar yordamida yechish jarayoni ham muayyan qiyinchiliklar bilan bog'liq. Integral operatorlar bilan ishlash, ayniqsa yuqori o'lchamli sohalarda, hisoblash murakkabligini oshiradi va samarali algoritmlar ishlab chiqishni talab qiladi.

Shunga qaramay, elliptik tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalar keng amaliy qo'llanilish imkoniyatlariga ega. Ular, xususan, quyidagi yo'nalishlarda muhim ahamiyat kasb etadi:

issiqlik tarqalishi jarayonlarini modellashtirishda, ayniqsa butun tizim bo'yicha energiya balansini hisobga olishda;

biologik tizimlarda, masalan, populyatsiya dinamikasi yoki diffuziya jarayonlarini tavsiflashda;

boshqaruv nazariyasida, global cheklovlar mavjud bo'lgan optimallashtirish masalalarini yechishda.

Shunday qilib, nolokal chegaraviy masalalarni integral tenglamalar usuli asosida o'rganish zamonaviy matematik tadqiqotlarning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, u nazariy chuqurlik va amaliy ahamiyatni o'zida mujassam etadi.

**Xulosa.** Mazkur ishda elliptik tipdagi differensial tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalar integral tenglamalar usuli asosida tizimli ravishda o'rganildi. Tadqiqot jarayonida berilgan differensial masala Green funksiyasi yordamida Fredgolm tipidagi integral tenglamaga keltirildi va u funksional analiz hamda operatorlar nazariyasi doirasida tahlil qilindi.

Fredgolm nazariyasiga tayangan holda masalaning yechiluvchanligi chuqur o'rganilib, yechimning mavjudligi, yagonaligi hamda barqarorligi qat'iy matematik asosda isbotlandi. Xususan, kompakt operatorlar nazariyasi va spektral tahlil usullari yordamida berilgan nolokal masalaning yechimga ega bo'lish shartlari aniqlab berildi. Shu bilan birga, yechimning tashqi ta'sirlarga (ya'ni o'ng tomondagi funksiyaga) nisbatan uzluksiz bog'liqligi asoslandi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, nolokal chegaraviy shartlarni qo'llash klassik elliptik masalalarni muhim darajada umumlashtiradi va real jarayonlarni yanada to'liqroq modellashtirish imkonini beradi. Integral tenglamalar usuli esa bunday masalalarni yechishda samarali va nazariy jihatdan asoslangan yondashuv ekanligi bilan ajralib turadi.

Mazkur tadqiqot natijalari nafaqat elliptik tipdagi tenglamalar nazariyasini rivojlantirishga xizmat qiladi, balki kelgusida nolokal masalalarning yanada murakkab turlari, jumladan, nolinear tenglamalar, aralash tipdagi tenglamalar hamda sonli yechim usullarini ishlab chiqish uchun mustahkam ilmiy asos bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Shunday qilib, elliptik tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalarni integral tenglamalar usuli asosida tadqiq etish zamonaviy matematik tahlilning dolzarb va istiqbolli yo'nalishlaridan biri ekanligi yana bir bor tasdiqlandi.

#### **Foydalanilgan adabiyotlar:**

1. Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamalari, T. «Uzbekiston», 2002.
2. Mixlin S. G. Kurs matematicheskoy fiziki, M.1968
3. S.L. Sobolev, Uravneniya matematicheskoy fiziki, Nauka, 1966 g.

4. A.V.Bitsadze, *Urvneniya matematicheskoy fiziki*. M.1976
5. Evans L.C. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.
6. Gilbarg D., Trudinger N. *Elliptic PDEs*. Springer.
7. Kreyszig E. *Functional Analysis*.
8. Lions J.L. *Optimal Control*.
9. Bitsadze A.V. *Equations of Mixed Type*.

---

**Ergasheva Mukarramxon Tolibjon qizi**, Farg'ona davlat universiteti filologiya fakulteti o'zbek tili yo'nalishi IV bosqich talabasi  
email:mukarramxonergasheva39@gmail.com



---

**ARABCHA O'ZLASHMALARNING LEKSIK-SEMANTIK XUSUSIYATLARI  
TAHLILI**

<https://zenodo.org/records/19827213>

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada o'zbek tilidagi arabcha o'zlashmalarning leksik-semantik xususiyatlari tahlil qilinadi. Arab tilidan kirib kelgan so'zlarning semantik taraqqiyoti, ma'no torayishi va kengayishi, ko'chma ma'nolarda qo'llanishi hamda uslubiy jihatdan faol yoki passiv qatlamga mansubligi masalalari yoritiladi.

**Kalit so'zlar:** arabcha o'zlashmalar, leksik-semantik xususiyatlar, o'zbek tili leksikasi, semantik o'zgarish, ma'no torayishi, ma'no kengayishi, uslubiy qatlam, til taraqqiyoti.

**ANALYSIS OF LEXICAL-SEMANTIC PROPERTIES OF ARABIC CONSONANTS**

**Annotation:** This article analyzes the lexical-semantic characteristics of Arabic borrowings in the Uzbek language. The issues of semantic development of words imported from Arabic, narrowing and expanding their meaning, their use in portable meanings, and their belonging to the stylistically active or passive layer are covered.

**Keywords:** Arabic borrowings, lexical-semantic features, Uzbek lexicon, semantic change, narrowing of meaning, broadening of meaning, stylistic layer, language development.

**АНАЛИЗ ЛЕКСИКО-СЕМАНТИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ АРАБСКИХ  
ЗАИМСТВОВАНИЙ**

**Аннотация:** В данной статье анализируются лексико-семантические характеристики арабских заимствований в узбекском языке. Рассматриваются вопросы семантического развития слов, заимствованных из арабского языка, сужения и расширения их значения, их использования в переносимых значениях, а также их принадлежности к стилистически активному или пассивному слою.